数理解析研究所講究録
1110 巻 1999 年 1-8

非可換 C^*- 環の Serre-Swan 定理

京大数理研 川村 勝紀 (Katsunori Kawamura) [1]

今回の研究集会の約1ヶ月後に、ある方より D_X- 加群と、ヒルベルト C^*-加群についての私の研究との関連が指摘されたので今回はその方面からの解説を行う。

1　D から C^* へ（平坦な接続による線形量子化）

ヒルベルト C^*- 加群とは一般に非可換な C^*- 環の加群の一種である。他の分野で非可換環の加群といえば代数解析でお馴染みの D_X- 加群 ([3]) がよく研究されていてかつ、表現論等にも深く関係していることから広く知られている。ここで X は複素多様体、D_X は X の構造層 $\mathcal{O}_X$ 上の微分作用素環の層である。この道具立てから C^*- 環のヒルベルト C^*- 加群とベクトル束の関係を自然に導く。一言で言えば

（★）「任意の C^*- 環の任意のヒルベルト C^*- 加群は
ある D_X- 環の部分環の加群である。」

層の話はここでは関係ないので層ではなく $\mathcal{O}_X$ は関数環 ($=\mathcal{O}_X(X)$)、D_X は微分作用素環 ($=D_X(X)$) と思うことにする。さて、D_X- 加群 M には以下の言い換えがある。

Fact 1.1 （加群の（一般化された）接続による言い換え）左 D_X- 加群 M を与えることと、次を満たす $\mathcal{O}_X$- 加群を与えることは同値である。

(i). M はベクトル場 θ の作用 $\nabla_\theta : M \to M$ をもち、

(ii). $\nabla_{f\theta}\, s = f\nabla_\theta\, s,$

[1]e-mail : kawamura@kurims.kyoto-u.ac.jp.

(iii). $\nabla_\theta (fs) = \theta(f)\, s + f \nabla_\theta\, s,$

(iv). $\nabla_{[\theta_1,\theta_2]}\, s = [\nabla_{\theta_1}, \nabla_{\theta_2}]\, s$

ここで $\theta, \theta_1, \theta_2$ は X のベクトル場、$f \in \mathcal{O}_X$, $s \in M$. 見ての通り ∇ はベクトル束の平坦な接続で $s \in M$ は切断と思えると主張しているが、この点については実際にベクトル束の接続になる場合とそうでない場合に分けて議論されている。

次に X を特に Kähler 多様体とし、$\mathcal{O}_X$ の代わりに X の下にある実解析的多様体 $X_{\mathbf{R}}$ 上の C^∞- 関数環を $C^\infty(X)$ を考える。 Θ_X を X 上の滑らかなベクトル場全体とする。そこでの D_X は $C^\infty(X)$ 上の線形写像全体 $\mathrm{End}(C^\infty(X))$ の中で、$C^\infty(X)$ と、Θ_X から生成される $\mathrm{End}(C^\infty(X))$ の部分環である。ここで $C^\infty(X)$ の $C^\infty(X)$ への作用は各点での掛け算とする。 $C^\infty(X)$ から D_X への写像 N を

$$N : C^\infty(X) \to D_X,$$
$$N_f l \equiv f \cdot l - \sqrt{-1} X_f l \quad (\, f, l \in C^\infty(X)\,)$$

で定める。 ここで X_f は X のケーラー形式 ω により定まる正則なベクトル場で以下で定義される。

$$\omega(\bar{Y}, X_l) = \bar{\partial} l(\bar{Y}) \qquad (\,\bar{Y} \in \bar{\Theta}_X\,).$$

ここで $\bar{\Theta}_X$ は X 上の反正則なベクトル場全体のなす空間とする。そこで $\mathcal{N}_X$ を D_X のなかで $\{N_l : l \in C^\infty(X)\}$ で生成された環とする。 すぐに分かることは

$$-[N_l, N_m] = \sqrt{-1} N_{\{l,m\}} + R_{X_l, X_m} \qquad (\, l, m \in C^\infty(X)\,) \qquad \text{(Eq.1.1)}$$

ここで $\{\cdot,\cdot\}$ は ω の純虚数虚数部分により定義されるシンプレクティック形式による、ポアッソン括弧、R は X のケーラー計量のレビ・チビタ接続の曲率である。つまり、$\mathcal{N}_X$ はポアッソン環 $(C^\infty(X), \{\cdot,\cdot\})$ を $-\sqrt{-1}$ でスケーリングして曲率で変形したような環になっている。ここまでで (★) の「D_X- 加群の部分環」の粗削りな抽出である $\mathcal{N}_X$ を定義した。実際に $C^\infty(X)$- 加群 M で平坦な接続 ∇ があるとき、$\mathcal{N}_X$ の生成元 N_f, $f \in C^\infty(X)$ は

$$N_f s \equiv fs - \sqrt{-1} \nabla_{X_f}\, s \quad (\, s \in M\,) \qquad \text{(Eq.1.2)}$$

により M に作用する。ヒルベルト C^*- 加群は右加群なので、その準備として、作用を右からに変えた微分作用素の環を以下で定義する。

$$l Q_f \equiv l \cdot f - \sqrt{-1} X_f l \quad (\, f, l \in C^\infty(X)\,). \qquad \text{(Eq.1.3)}$$

すると、関係式 Eq.1.1は以下のようになる。

$$[Q_l, Q_m] = \sqrt{-1}Q_{\{l,m\}} + R_{X_l,X_m} \qquad (\, l,m \in C^\infty(X)\,) \qquad \text{(Eq.1.4)}$$

ベクトル空間 $C^\infty(X)$ に右から作用し

$$\{Q_l \in \mathrm{End}(C^\infty(X)) : l \in C^\infty(X)\}$$

で生成される環を $\mathcal{Q}_X$ と記すことにする。写像

$$Q : C^\infty(X) \to \mathcal{Q}_X$$

$$Q(f) \equiv Q_f \qquad (\, f \in C^\infty(X)\,) \qquad \text{(Eq.1.5)}$$

は線形かつ、曲率の項を除いてリー環の準同形になっている。$\mathcal{D}_X$- 加群 M 上での作用 Eq.1.2は

$$sQ_f \equiv fs - \sqrt{-1}\nabla_{X_f}s \quad (\, s \in M\,) \qquad \text{(Eq.1.6)}$$

となる。すると、

$$\begin{aligned} s[Q_l, Q_m] &= -\sqrt{-1}(X_m l - X_l m)s + [\nabla_{X_l},\, \nabla_{X_m}]s \\ &= \sqrt{-1}\{l,m\}s + [\nabla_{X_l},\, \nabla_{X_m}]s \\ &= \sqrt{-1}sQ_{\{l,m\}} + R^{\nabla}_{X_l,X_m}s. \end{aligned}$$

ここで、R^∇ は接続 ∇ の曲率。∇ は平坦にとったから

$$[Q_l, Q_m] = \sqrt{-1}Q_{\{l,m\}}$$

が M 上で成り立つ。以上の構成によって、ポアソンリー環 $(C^\infty(X), \{\cdot,\cdot\})$ の、平坦な接続 ∇ による、量子化のような対応が得られた。実際、もし関数 $l, m \in C^\infty(X)$ が

$$\{l,m\} = 1$$

を満たすとき、Q の定義式より

$$Q_1 = I$$

だから、M 上では

$$[Q_l, Q_m] = \sqrt{-1}I$$

となる。

2 D から C^* へ （D- 加群とヒルベルト C^*- 加群）

前節ではケーラー多様体 X の上の微分作用素環 D_X の部分環 $\mathcal{Q}_X$ を構成した。勿論 D_X 加群は $\mathcal{Q}_X$ 加群である。さてそろそろ C^* の世界へ進むことにする。一般の C^*- 環の場合は後で述べるとして、まずは行列環 $M_n(\mathbf{C})$ を考えよう ($n \geq 2$)。この時は X を $n-1$ 次元複素射影空間

$$P(\mathbf{C}^n) \equiv (\mathbf{C}^n \setminus \{0\})/\mathbf{C}^\times$$

ととる。一般の接続と呼ばれる D_X- 加群は可積分な接続を持つベクトル束に Serre-Swan 定理により対応している。 ヒルベルト C^*- 加群の場合に今回登場するベクトル束は次のようなものである。全空間として実 $2n-1$- 次元球面

$$S(\mathbf{C}^n) \equiv \{z \in \mathbf{C}^n : \|z\| = 1\}$$

$S(\mathbf{C}^n)$ から底空間 $P(\mathbf{C}^n)$ への全射 p を

$$\begin{aligned} p : S(\mathbf{C}^n) &\to P(\mathbf{C}^n), \\ p(z) &\equiv [z] \qquad (\, z \in S(\mathbf{C}^n)\,) \end{aligned}$$

で定める。 $(S(\mathbf{C}^n), p, P(\mathbf{C}^n))$ をホップ束と呼ぶ。 ホップ束は構造群が $U(1)$ の主ファイバー束である。以下、 $X = P(\mathbf{C}^n)$, $S = S(\mathbf{C}^n)$ と記す。 $M_n(\mathbf{C})$ から $C^\infty(X)$ への単射線形写像

$$\begin{aligned} f : M_n(\mathbf{C}) &\to C^\infty(X), \\ f_A([x]) &\equiv < x|Ax > \qquad (\, [x] \in X, \, x \in S\,) \end{aligned}$$

は以下の性質を持つ：

$$\sqrt{-1}\{f_A, f_B\} = f_{[A,B]} \quad (\, A, B \in M_n(\mathbf{C})\,).$$

写像 f と Q の合成により、 $M_n(\mathbf{C})$ は $\mathcal{Q}_X$ のなかで部分環 $\mathcal{F}$ を生成する。

$$M_n(\mathbf{C}^n) \ \xrightarrow{f} C^\infty(X) \xrightarrow{Q} \ \mathcal{Q}_X \ \subset D_X,$$

Lemma 2.1 $V \equiv f(M_n(\mathbf{C})) \subset C^\infty(X)$ とする。 $\xi \in \mathcal{F}$ は V を V に移し、 V 上へ $\mathcal{F}$ を制限すると環としての同型

$$Q \circ f : M_n(\mathbf{C}) \cong \mathcal{F}|_V$$

が成り立つ。

Theorem 2.1 (i). $M_n(\mathbf{C})$ の 0 でない勝手な（有限生成、射影性のどちらも仮定しない）ヒルベルト C^*- 加群 M に対し、あるヒルベルト空間 F_M があって、X 上のホップ束 (S,p,X) に付随するあるヒルベルト束 $(S\times_\alpha F_M, p_M, X)$ がある。ここで、α は $U(1)$ の F_M へのベクトルの係数に大きさ 1 の複素数をかけることにより定義される作用とする。

(ii). その切断のなすある線形部分空間 Γ_M で $(S\times_\alpha F_M, p_M, X)$ の自然なエルミート計量 H により定まるノルム

$$\|s\| \equiv \sup_{[x]\in X} |H_{[x]}(s,s)|^{1/2} \qquad (\, s\in\Gamma_M\,)$$

で完備なもので、M とバナッハ空間として同型であるものが存在する。この同型写像を

$$s : M \cong \Gamma_M,$$

$$\xi \mapsto s_\xi \qquad (\,\xi\in M\,)$$

と記す。

(iii). H の *canonical* な接続 ∇ は可積分（平坦）で $\mathcal{F}$ はこの接続により Γ_M に *Eq.1.6*の式により作用する。さらに以下の式が成り立つ。

$$s_\xi Q_{f_A} = s_{\xi A} \qquad (\, A\in M_n(\mathbf{C}),\, \xi\in\Gamma_M\,).$$

(iv). M の C^*- 内積 $<\cdot|\cdot>_M$ は H により定まる Γ_M 上の $f(M_n(\mathbf{C}))$- 値内積と以下の意味で等長同値である。

$$<x|<\xi|\eta>_M x>= H_{[x]}(s_\xi, s_\eta)$$

$$(\,\xi,\eta\in M,\, [x]\in X\,).$$

(v). $M_n(\mathbf{C})$ と $\mathcal{F}|_V$ を同一視すると、Γ_M は $M_n(\mathbf{C})$ のヒルベルト C^*- 加群として M と同型である。

以上により、$M_n(\mathbf{C})$ のヒルベルト C^*- 加群が $n-1$ 次元複素射影空間上のベクトル束の切断のなすベクトル空間として実現された。

3 一般の非可換 C^*- 環の場合

ここから研究集会で話した内容を微分作用素のなす環の加群に対する Serre-Swan 定理として翻訳したものを記す。任意の、単位元をもつ C^*- 環 $\mathcal{A}$ に対して、ゲルファント表現

$$f : \mathcal{A} \to C(\mathcal{P}),$$
$$f_A(\rho) \equiv \rho(A) \qquad (A \in \mathcal{A},\, \rho \in \mathcal{P})$$

は単射線形写像である。ここで $\mathcal{P}$ は $\mathcal{A}$ の純粋状態の全体のなす集合に弱 $*$- 位相を入れた位相空間である。（前節までの X に対応する空間である。）$\rho \in \mathcal{P}$ に対して、その GNS- 表現と同値な GNS- 表現を与える $\mathcal{P}$ の元の集まりはケーラー多様体の構造を持つ [2]。さらに、ゲルファント表現 f の像は以下の集合と一致する。

$$\mathcal{K}_u(\mathcal{P}) \equiv \left\{ l \in C^\infty(\mathcal{P}) : \begin{array}{c} D^2 l = 0,\ \bar{D}^2 l = 0, \\ \bar{l} Q_l,\ l Q_{\bar{l}},\ l \\ \text{は一様連続 } \mathcal{P} \end{array} \right\}$$

ここで Q は Eq.1.3により定義される写像、D と $\bar{D}$ は状態の同値類の上で定義される、共変微分の正則部分と反正則部分、$\bar{l}$ は関数 l の複素共役、そして $\mathcal{P}$ での一様性は弱 $*$- 位相によるものとする ([1])。$\mathcal{K}_u(\mathcal{P})$ にノルムを

$$\|l\| \equiv \sup_{\rho \in \mathcal{P}} |(\bar{l} Q_l)(\rho)|^{\frac{1}{2}} \qquad (l \in \mathcal{K}_u(\mathcal{P}))$$

で定める。すると、Eq.1.3により定義される写像

$$Q : \mathcal{K}_u(\mathcal{P}) \to \mathrm{End}(\mathcal{K}_u(\mathcal{P}))$$

による像 $\mathcal{F} \subset \mathrm{End}(\mathcal{K}_u(\mathcal{P}))$ は $\mathcal{A}$ に同型な C^*- 環になる。ここで $\mathcal{F}$ の対合は $(Q_l)^* \equiv Q_{\bar{l}}$, $\mathcal{F}$ のノルムは $\mathcal{K}_u(\mathcal{P})$ 上での作用素ノルムとする。この同型射

$$\phi : \mathcal{A} \cong \mathcal{F}$$

は以下の式で与えられる。

$$\phi(A) = Q_{f_A} \quad (A \in \mathcal{A}).$$

今後 $\mathcal{F}$ を $\mathcal{F}_A$ と記すことにする。ここまでが [2] の結果の言い換えである。この意味でヒルベルト $\mathcal{A}$- 加群 $\mathcal{X}$ は微分作用素の環の部分環 $\mathcal{F}_A \cong \mathcal{A}$ の右加群になる。

我々の目的はヒルベルト $\mathcal{A}$- 加群 $\mathcal{X}$ に対し、$\mathcal{P}$ 上のヒルベルト束 $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}$ とその接続 ∇ を Fact1.1のごとく構成することにある。その構成法は古典的な Serre-Swan 定理の証明と大筋では一致している。まず、$\rho \in \mathcal{P}$ に対し、

$$N_\rho \equiv \{\xi \in \mathcal{X} : \rho(<\xi|\xi>) = 0\}$$

とすると、N_ρ は $\mathcal{X}$ の閉部分線形空間になる。ここで $<\cdot|\cdot>$ はヒルベルト $\mathcal{A}$- 加群 $\mathcal{X}$ の $\mathcal{A}$- 値内積とする。N_ρ による $\mathcal{X}$ の商空間は $<\cdot|\cdot>$ から導入された内積 $<\cdot|\cdot>_\rho$ により前ヒルベルト空間になる。その完備化を $\mathcal{E}_{\mathcal{X},\rho}$ とする。求めるヒルベルト束 $(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}, \Pi_{\mathcal{X}}, \mathcal{P})$ を以下で定義する。

$$\mathcal{E}_{\mathcal{X}} \equiv \bigcup_{\rho\in\mathcal{P}} \mathcal{E}_{\mathcal{X},\rho},$$

$$\Pi_{\mathcal{X}} : \mathcal{E}_{\mathcal{X}} \to \mathcal{P},$$

$$\Pi_{\mathcal{X}}(v) \equiv \rho \qquad \text{when } v \in \mathcal{E}_{\mathcal{X},\rho}.$$

すると、$\mathcal{P}$ の中の状態の同値類の作るケーラー多様体に形式的な束 $(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}, \Pi_{\mathcal{X}}, \mathcal{P})$ を制限すると、それはある無限次元ホップ束に同伴する（局所自明な）正則なヒルベルト束と同型になる。ここで無限次元ホップ束 $(S(\mathcal{H}), \mu, P(\mathcal{H}))$ の具体的な定義は、ある（一般に非可算無限次元な）複素ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に対し前節で定義された有限次元ホップ束で $\mathbf{C}^n$ を $\mathcal{H}$ に変えるだけでよい。$(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}, \Pi_{\mathcal{X}}, \mathcal{P})$ は各ファイバー上の内積により定義されるエルミート計量 H をもつ。正則なベクトル束のエルミート計量 H にたいして、H をたもつ接続 ∇ が一意に存在する。

次に上で構成したヒルベルト束 $(\mathcal{E}_{\mathcal{X}}, \Pi_{\mathcal{X}}, \mathcal{P})$ と接続 ∇ に対して、ヒルベルト $\mathcal{A}$- 加群 $\mathcal{X}$ がどのように表せるかをみる。$\Gamma(\mathcal{E}_{\mathcal{X}})$ を $\mathcal{E}_{\mathcal{X}}$ 上の正則な切断のなすベクトル空間とする。すると、接続 ∇ により定まる環 $\Gamma(\mathcal{E}_{\mathcal{X}})$ への $\mathcal{F}_{\mathcal{A}}$ の作用が式 Eq.1.2で定まる。すると Lemma 2.1に対応する結果が得られる。この時、写像

$$s : \mathcal{X} \to \Gamma(\mathcal{E}_{\mathcal{X}})$$

は

$$s_\xi(\rho) \equiv \xi + N_\rho \in \mathcal{E}_{\mathcal{X},\rho} \qquad (\rho \in \mathcal{P}, \xi \in \mathcal{X})$$

であたえられる。このようにして、第一節での目標の命題（★）を導いた。

4 注意

今回の話は単位元をもつ C^*- 環とそのヒルベルト加群に対して、有限生成性、射影性を仮定しないで成り立つ。C^*- 環が可換のときは、コンパクト・ハウスドルフ空間での通常の Serre-Swan 定理となる。フォン・ノイマン環の場合は、[2] でのゲルファント表現の構成法より、弱位相に関して同型な関数環表現ができない。平坦でない接続に対して、同様の議論をある程度までは進めることができるが、それが何を意味するのか現在のところ不明である。層の議論は、C^*- 環の部分環の双対（または状態の空間）の構造がほとんど未知のため今のところ意味があるとは思えない。ある条件を持つ部分環の族に対しては層のようなことは考えられるのかも知れない。射影空間以外のケーラー多様体に関しては、第 3 節の $\mathcal{K}_u(\mathcal{P})$ に対応するものとして、上半平面などの複素双曲空間で無限次元の微分作用素の環の構造が計算されている。この場合は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ と線型空間として同型だが、積の異なる非可換環が現れる。この場合は、微分作用素の定義式 Eq.1.3で右辺第 2 項の符号を正にした形の元で生成される。

References

[1] N.Bourbaki, *Elements of Mathematics, General topology part I*, Addison-Wesley Publishing company (1966).

[2] R.Cirelli, A.Manià and L.Pizzocchero, *A functional representation of noncommutative C^*-algebras*, Rev.Math.Phys. Vol. 6, No.5 (1994) 675-697.

[3] 谷崎俊之, 堀田良之, *D* 加群と代数群 シュプリンガー・フェアラーク東京 (1994).